Алгоритм построения кубических интерполяционных сплайнов в задачах управления работой приводов с прогнозированием динамики нагрузки

д.т.н. проф. **Н. И. Гданский**, доц. к.т.н. **А.В. Карпов**, асп. **А.А. Бугаенко**

1. Введение

В цифровых системах управления вращательным движением при моделировании внешней нагрузки $M = M(t, \varphi(t))$, действующей на рабочий вал привода вращательного движения, в виде набора постоянных коэффициентов $\overline{M}^k$, имеющих смысл усредненных значений частных производных по времени t и углу поворота вала φ, мгновенную величину $M(t, \varphi(t))$ в общем случае можно представить в виде скалярного произведения $M(t,\varphi(t)) = (\overline{M}^k, \overline{\varphi}^k(t))$, в котором вектор $\overline{\varphi}^k(t)$ называемый *вектором кинематических характеристик*, соответствующим модели $\overline{M}^k$, зависит только от t и производных φ по t, имеющих порядок от первого до k – порядка модели $\overline{M}^k$.

При таком способе представления внешней нагрузки для расчета управляющего воздействия в данной системе используется работа A, которую должен совершать двигатель на заданном периоде импульсного управления T. Необходимая величина работы на отрезке изменения времени $[t_i, t_{i+1}]$ как функция времени будет рассчитываться по формуле:

$$A_i(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\overline{M}^k, \overline{\varphi}^k(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

Как следует из общего вида формул, получаемых после раскрытия интеграла (1), в них входят только производные φ по t, порядков от 1 до k. В частности, в случае использования модели нагрузки второго порядка $\overline{M}^2$ максимальный порядок производных φ по t в формуле (1) равен 2. Поскольку сама зависимость $\varphi(t)$ в (1) явно не входит, то это свойство решаемой задачи можно использовать для упрощения вспомогательной задачи интерполирования траектории перемещения вала по заданным ее узловым точкам.

Допустим, задан упорядоченный массив узлов $P_i = (t_i, \varphi_i)$ $(i = 0, ..., n)$, лежащих на траектории перемещения. Для построения кусочно-полиномиальной кривой второй степени гладкости, проходящей через заданные узлы, наилучшим решением являются интерполяционные кубические сплайны [1, 2], которые на промежутках между узлами представляют собой кубические параболы, непрерывно соединяющиеся в точках $t_1, ..., t_{n-1}$ (называемых внутренними) с гладкостью степени 2. Также они обладают следующим важным свойством. Если наложить на сплайн в начальном и конечном узле краевые условия $\varphi''(t_0) = \varphi''(t_n) = 0$, то он будет минимизировать функционал

$$J(\varphi(t)) = \int_{t_0}^{t_n} |\varphi''(t)|^2 dt,$$

который в случае перемещения равен минимуму работы, совершаемой инерционными нагрузками, создаваемыми перемещаемым звеном.

Рассмотрим глобальную переменную t. В математической форме полная совокупность геометрических условий относительно t, накладываемых на кубические параболы $\{S_i(t), i=1,2,\ldots,n\}$, имеет вид:

а) $\varphi(t) = S_i(t)$ при $t_{i-1} \le t \le t_i$; $i = 1, 2, \ldots, n$. – условие кусочности $\varphi(t)$;

б) $S_i(t_{i-1}) = P_{i-1}$; $S_i(t_i) = P_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ – условия прохождения сплайна $S_i(t)$ через заданные узлы ломаной P_{i-1} и P_i;

в) $S_{\bar{i}}'(t_i) = S_{\bar{i}+1}'(t_i)$, $i = 1, \ldots, n-1$ – гладкость порядка 1 во внутренних узлах;

г) $S_{\bar{i}}''(t_i) = S_{\bar{i}+1}''(t_i)$, $i=1, \ldots, n-1$ – гладкость порядка 2 во внутренних узлах;

д) $S_1''(t_0) = S_n''(t_n) = 0$ - краевые условия в начальном и конечном узлах. (2)

Общепринятым методом построения кубических интерполяционных сплайнов является использование локальных сплайнов Эрмита. Данные сплайны строят по двукратным узлам t_i, в которых помимо значений $S_i(t_i)$ заданы также величины первых производных $S_i'(t_i)$. Поскольку в исходной задаче значения первых производных $S_i'(t_i)$ не задаются, их рассматривают в качестве неизвестных величин задачи, для решения которой составляют линейную систему уравнений. Матрица ее трёхдиагональна, что позволяет решать систему при помощи специальную упрощенной модификации метода Гаусса – метода прогонки [1, 2]. Основными стадиями метода прогонки являются:

1) расчет коэффициентов матрицы,
2) прямая прогонка,
3) обратная прогонка.

Расчет трудоемкости реализации алгоритма прогонки (таблица 1) показывает, что при максимальном сокращении расчетных формул вычислительные затраты при построении n сплайнов относительно невелики и составляют (после суммирования пп.1-3 таблицы 1): сложений $9n$-3, умножений $8n$-3, делений $4n$-2.

Табл.1. Расчет минимального числа расчетных операций при построении n сплайнов

Стадии	Сложения и вычитания	Умножения	Деления
1.Расчет коэффициентов матрицы	$5n$-2	$4n$-2	(n-1)
2. Прямая прогонка	$3n$-1	$3n$-1	$3n$-2
3.Обратная прогонка	n	n	1
4а.Переход к каноническому виду по τ_i	$5n$	$5n$	0
4б.Переход к каноническому виду по t	$19n$	$28n$	$2n$
ИТОГО при переходе к каноническому виду по t_i,	$14n$-3	$13n$-3	$4n$-2
ИТОГО при переходе к каноническому виду по x	$28n$-3	$36n$-3	$6n$-2

Существенной особенностью данного метода является то, что:

1) независимой переменной каждого сплайна S_i является нормированная на отрезке $[t_{i-1}; t_i]$ локальная переменная $\tau_i = (t - t_{i-1})/h_i$, где $h_i =(t_i - t_{i-1})$,

2) результирующие сплайны S_i имеют вид полиномов Эрмита,

При каждом расчете значений сплайна S_i переход 1) от глобальной переменной t к локальной τ_i при однократном расчете длин отрезков {} требует выполнения одного вычитания и одного деления.

Однако затраты при расчете полинома Эрмита 2) по сравнению с использованием схемы Горнера для кубического полинома (3 сложения и 3 умножения) слишком высоки и при большом числе расчетов значений сплайна S_i необходимо перейти от полинома Эрмита к каноническом виду по локальной переменной τ_i. Данный переход при максимальном сокращении расчетных формул при построении n сплайнов требует относительно невысоких вычислительных затрат (п.4а таблицы 1): сложений $5n$, умножений $5n$.

Таким образом, для построения n сплайнов в форме канонических полиномов, зависящих от локальных переменных τ_i, необходимо затратить (сумма пп.1-4а таблицы 1): сложений $14n$-3, умножений $13n$-3, делений $4n$-2.

Существенной особенностью интерполирования при решении рассмотренной выше задачи управления является то, что в формулы интегралов работ (1) входят только старшие коэффициенты $\{C_1, C_2, C_3\}$ канонических кубических полиномов, зависящих от глобальной переменной t. Свободный коэффициент C_0 не входит. Переход от сплайнов в форме полиномов Эрмита, зависящих от локальных переменных τ_i, к каноническим полиномам по глобальной переменной t, требует значительных вычислительных затрат (п.4б таблицы 1). В сумме для построения n сплайнов в форме канонических полиномов, зависящих от глобальной переменной t, необходимо затратить (сумма пп.1-3 и 4б таблицы 1): сложений $28n$-3, умножений $36n$-3, делений $6n$-2.

2. Постановка задачи

Для существенного снижения вычислительных затрат предложен прямой метод построения кубических интерполирующих сплайнов, в котором сплайны рассматриваются сразу в канонической форме по глобальной переменной t без использования полиномов Эрмита, а также не рассчитываются свободные коэффициенты сплайнов C_0. Такое интерполирование в отличие от традиционного назовем *частичным*.

Введем для упрощения расчетов новую относительную глобальную переменную $\tau = t - t_0$.

Постановка задачи. На плоскости $\tau O\varphi$ задан набор из $(n+1)$ точки вида $\overline{P_i} = (\varphi_i, \tau_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Рассмотрим на отрезках $[\overline{P}_{i-1}; \overline{P}_i]$ кубические сплайны:

$S_i(\tau) = C_0^i + C_1^i\tau + C_2^i\tau^2/2 + C_3^i\tau^3/3,\ i = 1, \ldots, n.$ (3)

Необходимо найти коэффициенты $\{C_1^i, C_2^i, C_3^i\}$ всех сплайнов $\{S_i(\tau)\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ из условия гладкости степени 2 во внутренних узлах при заданных краевых условиях:

$S_1''(0) = 0;\ S_n''(\tau_n) = 0.$ (4)

Поскольку свободные коэффициенты C_0^i сплайнов $\{S_i(\tau)\}$ не требуется определять, рассматриваем вместо $S_i(\tau)$ их первые производные, которые являются квадратными параболами вида:

$D^i(\tau) = (S_i(\tau))_\tau' = C_1^i + C_2^i\tau + C_3^i\tau^2.$ (5)

Таким образом, частичное решение задачи интерполирования (без определения свободных коэффициентов) сплайнов $S_i(\tau)$, зависящих от глобальной переменной τ, сведено к полному расчету коэффициентов $\{C_1^i, C_2^i, C_3^i, i = 1, \ldots, n\}$ соответствующих им квадратных парабол $\{D^i(\tau)\}$ (5).

3. Прямой метод частичного решения задачи интерполирования

Для решения задачи полного расчета коэффициентов $\{C_1^i, C_2^i, C_3^i, i = 1, \ldots, n\}$ квадратных парабол $\{D^i(\tau)\}$, зависящих от глобальной переменной τ, предложено использовать упрощённый (по сравнению с прогонкой, основанной на использовании полиномов Эрмита) метод, основная идея которого заключается в непосредственном расчете искомых коэффициентов без использования промежуточных представлений. Поэтому метод назван *прямым*.

Для определённости параболу $D^1(\tau)$ будем называть *начальной*, параболы $D^2(\tau)$ - $D^{n-1}(\tau)$ – *внутренними*, $D^n(\tau)$ – *конечной*. Как и в методе прогонки, в предлагаемом методе для расчета искомых коэффициентов используем прямой и обратный ход.

Прямой ход.

Основная идея прямого хода заключается в том, что старший коэффициент текущей параболы $D^i(\tau)$ $(i = 1, \ldots, n\text{-}1)$ линейно выражается через старший квадратный коэффициент C_3^{i+1} следующей за ней параболы $D^{i+1}(\tau)$, а свободный C_1^i и линейный C_2^i коэффициенты параболы $D^i(\tau)$ выражаются C_3^i:

$C_3^i = A_3^i C_3^{i+1} + B_3^i;$

$C_1^i = A_1^i C_3^i + B_1^i;$

$C_2^i = A_2^i C_3^i + B_2^i.$ (6)

Отдельно рассмотрим начальную параболу $D^1(\tau)$, внутренние параболы $D^2(\tau)$ - $D^{n-1}(\tau)$ и конечную $D^n(\tau)$.

1. $D^1(\tau)$. Из условия $S_1''(0) = 0$ следует: $(D^1(0))' = C_2^1 + C_3^1 \cdot 0 = 0$. Отсюда получаем: $C_2^1 = 0$. При этом для коэффициента C_2^1: $A_2^1 = B_2^1 = 0.$ (7)

Из условий прохождения сплайна $S^1(\tau)$ через точки $\overline{P}_0=(\varphi_0,\tau_0=0)$ и $\overline{P}_1=(\varphi_1,\tau_1)$ следует:

$S_1(\tau_0=0)=C_0^1=\varphi_0$; $\quad S_1(\tau_1)=C_0^1+C_1^1\,\tau_1+C_2^1\,\tau_1^2/2+C_3^1\,\tau_1^3/3=\varphi_1$.

Вычтем из второго соотношения первое с учетом $C_2^1=0$:

$C_1^1\tau_1+C_3^1\,\tau_1^3/3=\Delta\varphi_1$, где $\Delta\varphi_1=\varphi_1-\varphi_0$.

Из этого равенства выразим линейную зависимость $C_1^1\,(C_3^1)$:

$$C_1^1=\Delta\varphi_1/\tau_1-C_3^1\,\tau_1^2/3=A_1^1\,C_3^1+B_1^1;\ A_1^1=-\tau_1^2/3;\ B_1^1=\Delta\varphi_1/\tau_1. \qquad (8)$$

Расчетные формулы для выражения младших коэффициентов C_1^1 и C_2^1 начальной параболы через старший C_3^1 следующие:

$$A_1^1=-\tau_1^2/3;\ B_1^1=\Delta\varphi_1/\tau_1;$$
$$A_2^1=0;\ B_2^1=0. \qquad (9)$$

Выражение (6) для старшего коэффициента C_3^1 у начальной параболы определяется при анализе параболы $D^2(\tau)$.

2. Рассмотрим внутренние параболы $D^i(\tau)$, $i=2,\ \ldots,\ n-1$.

К началу их анализа для предыдущей параболы $D^{i-1}(\tau)$ известны линейные зависимости:

$$C_1^{i-1}=A_1^{i-1}\,C_3^{i-1}+B_1^{i-1};$$
$$C_2^{i-1}=A_2^{i-1}\,C_3^{i-1}+B_2^{i-1}. \qquad (10)$$

Подставим формулы парабол $D^{i-1}(\tau)$ и $D^i(\tau)$ в условия гладкости второй степени в узле $\tau=\tau_{i-1}$ для сплайнов $S_{i-1}(\tau)$ и $S_i(\tau)$ $(S_{i-1}'(\tau_{i-1})=S_i'(\tau_{i-1});\ S_{i-1}''(\tau_{i-1})=S_i''(\tau_{i-1}))$:

$$C_1^{i-1}+C_2^{i-1}\,\tau_{i-1}+C_3^{i-1}\,\tau_{i-1}^2=C_1^i+C_2^i\,\tau_{i-1}+C_3^i\,\tau_{i-1}^2;$$
$$C_2^{i-1}+2C_3^{i-1}\,\tau_{i-1}=C_2^i+2C_3^i\,\tau_{i-1}.$$

Умножая обе части второго соотношения на $(-\tau_{i-1})$, складываем его с первым. При этом получим систему уравнений более простого вида:

$$C_1^{i-1}-C_3^{i-1}\,\tau_{i-1}^2=C_1^i-C_3^i\,\tau_{i-1}^2;$$
$$C_2^{i-1}+2C_3^{i-1}\,\tau_{i-1}=C_2^i+2C_3^i\,\tau_{i-1}.$$

Подставим в уравнения полученной системы зависимости (10):

$$(A_1^{i-1}-\tau_{i-1}^2)C_3^{i-1}+B_1^{i-1}=C_1^i-C_3^i\,\tau_{i-1}^2;$$
$$(A_2^{i-1}+2\tau_{i-1})\,C_3^{i-1}+B_2^{i-1}=C_2^i+2C_3^i\,\tau_{i-1}. \qquad (11)$$

Из условий $S_i(\tau_{i-1})=\varphi_{i-1}$; $S_i(\tau_i)=\varphi_i$ получим уравнение:

$$C_1^i+C_2^i(\tau_{i-1}+\tau_i)/2+C_3^i(\tau_{i-1}^2+\tau_{i-1}\tau_i+\tau_i^2)/3=\Delta\varphi_i/\Delta\tau_i, \qquad (12)$$

где $\Delta\varphi_i=\Delta\varphi_i-\varphi_{i-1}$, $\Delta\tau_i=\tau_i-\tau_{i-1}$.

Складывая (12) с первым уравнением (11) и вторым, умноженным на $(\tau_{i-1}+\tau_i)/2$, получим соотношение, содержащее только коэффициенты C_3^{i-1} и C_3^i:

$$(A_1^{i-1}-\tau_{i-1}^2)C_3^{i-1}+B_1^{i-1}+(A_2^{i-1}+2\tau_{i-1})\,C_3^{i-1}(\tau_{i-1}+\tau_i)/2+B_2^{i-1}(\tau_{i-1}+\tau_i)/2+C_3^i(\tau_{i-1}^2+\tau_{i-1}\tau_i+\tau_i^2)/3=\Delta\varphi_i/\Delta\tau_i-C_3^i\,\tau_{i-1}^2+2C_3^i\tau_{i-1}\,(\tau_{i-1}+\tau_i)/2.$$

Преобразуя его, выразим C_3^{i-1} через C_3^i:

$$C_3^{i-1}\,[A_1^{i-1}+A_2^{i-1}(\tau_{i-1}+\tau_i)/2+\tau_{i-1}\tau_i]=C_3^i[-(\tau_{i-1}^2+\tau_{i-1}\tau_i+\tau_i^2)/3+\tau_{i-1}\tau_i]+\Delta\varphi_i/\Delta\tau_{i-1}-B_1^{i-1}-B_2^{i-1}(\tau_{i-1}+\tau_i)/2;$$

$$C_3^{i-1}=A_3^{i-1}\,C_3^i+B_3^{i-1};$$

где $\tau_{(i)\text{кв}}=\tau_i^2$; $A_3^{i-1}=-\Delta\tau_{(i)\text{кв}}/(3K)$; $B_3^{i-1}=(\Delta\varphi_i/\Delta\tau_i-B_1^{i-1}-B_2^{i-1}\,\tau_{i\text{ср}})/K$;

$$\tau_{i\text{ср}}=(\tau_{i-1}+\tau_i)/2\ ;\ K=A_1^{i-1}+A_2^{i-1}\tau_{i\text{ср}}+\tau_{i-1}\tau_i. \qquad (13)$$

После подстановки (13) в уравнения системы (11) выражаем из них искомые зависимости $C_1^i(C_3^i)$ и $C_2^i(C_3^i)$:

$$C_1^i=(A_1^{i-1}-\tau_{i-1}^2)C_3^{i-1}+B_1^{i-1}+C_3^i\,\tau_{i-1}^2=(A_1^{i-1}-\tau_{i-1}^2)(A_3^{i-1}\,C_3^{i-1}+B_3^{i-1})+B_1^{i-1}+C_3^i\,\tau_{i-1}^2=A_1^i\,C_3^i+B_1^i,$$

где $F^i=A_1^{i-1}-\tau_{(i-1)\text{кв}}$; $A_1^i=A_3^{i-1}\,F^i+\tau_{(i-1)\text{кв}}$; $B_1^i=B_3^{i-1}\,F^i+B_1^{i-1}$;

$$C_2^i=(A_2^{i-1}+2\tau_{i-1})\,C_3^{i-1}+B_2^{i-1}-2C_3^i\,\tau_{i-1}=(A_2^{i-1}+2\tau_{i-1})\,(A_3^{i-1}\,C_3^{i-1}+B_3^{i-1})+B_2^{i-1}-2C_3^i\,\tau_{i-1}=A_2^i\,C_3^i+B_2^i;$$

где $\tau_{(i-1)\text{у2}}=2\tau_{i-1}$; $G^i=A_2^{i-1}+\tau_{(i-1)\text{у2}}$; $A_2^i=A_3^{i-1}\,G^i-\tau_{(i-1)\text{у2}}$; $B_2^i=B_3^{i-1}\,G^i+B_2^{i-1}$. $\qquad$ (14)

Расчетные формулы для выражения младших коэффициентов C_1^i и C_2^i и старшего коэффициента C_3^{i-1} параболы D^{i-1} через старший коэффициент C_3^i параболы D^i следующие:

$\tau_{(i-1)кв}=\tau_{(i-1)}^{\;2}$; $\tau_{(i)кв}=\tau_i^2$; $\tau_{iср} = (\tau_{i-1} + \tau_i)/2$; $\Delta\varphi_i = \Delta\varphi_i - \varphi_{i-1}$, $\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1}$;

$K = A_1^{i-1} + A_2^{i-1}\tau_{iср} + \tau_{i-1}\tau_i$; $F^i = A_1^{i-1} - \tau_{(i-1)кв}$; $\tau_{(i-1)у2} = 2\tau_{i-1}$; $G^i = A_2^{i-1} + \tau_{(i-1)у2}$;

$A_3^{i-1} = -\Delta\tau_{(i)кв}/(3K)$; $B_3^{i-1} = (\Delta\varphi_i/\Delta\tau_i - B_1^{i-1} - B_2^{i-1}\tau_{iср})/K$;

$A_1^i = A_3^{i-1}F^i + \tau_{(i-1)кв}$; $B_1^i = B_3^{i-1}F^i + B_1^{i-1}$;

$A_2^i = A_3^{i-1}G^i - \tau_{(i-1)у2}$; $B_2^i = B_3^{i-1}G^i + B_2^{i-1}$. (15)

3. Конечная парабола $D^n(\tau)$.

К началу ее анализа для предыдущей параболы $D^{n-1}(\tau)$ известны зависимости:

$C_1^{n-1} = A_1^{n-1}C_3^{n-1} + B_1^{n-1}$;

$C_2^{n-1} = A_2^{n-1}C_3^{n-1} + B_2^{n-1}$. (16)

Из условий гладкости второй степени в предпоследнем узле $\tau = \tau_{n-1}$ для сплайнов $S_{n-1}(\tau)$ и $S_n(\tau)$ ($S_{n-1}'(\tau_{n-1}) = S_n'(\tau_{n-1})$; $S_{n-1}''(\tau_{n-1}) = S_n''(\tau_{n-1})$) получим:

$C_1^{n-1} + C_2^{n-1}\tau_{n-1} + C_3^{n-1}\tau_{n-1}^{\;2} = C_1^n + C_2^n\tau_{n-1} + C_3^n\tau_{n-1}^{\;2}$;

$C_2^{n-1} + 2C_3^{n-1}\tau_{n-1} = C_2^n + 2C_3^n\tau_{n-1}$.

Аналогично умножаем обе части второго соотношения на $(-\tau_{n-1})$, складываем его с первым и получаем систему более простого вида:

$C_1^{n-1} - C_3^{n-1}\tau_{n-1}^{\;2} = C_1^n - C_3^n\tau_{n-1}^{\;2}$;

$C_2^{n-1} + 2C_3^{n-1}\tau_{n-1} = C_2^n + 2C_3^n\tau_{n-1}$.

Подставим в уравнения системы зависимости (16):

$(A_1^{n-1} - \tau_{n-1}^{\;2})C_3^{n-1} + B_1^{n-1} = C_1^n - C_3^n\tau_{n-1}^{\;2}$;

$(A_2^{n-1} + 2\tau_{n-1})C_3^{n-1} + B_2^{n-1} = C_2^n + 2C_3^n\tau_{n-1}$. (17)

Аналогично из условий $S_n(\tau_{n-1}) = \varphi_{n-1}$; $S_n(\tau_n) = \varphi_n$ получим уравнение:

$C_1^n + C_2^n(\tau_{n-1} + \tau_n)/2 + C_3^n(\tau_{n-1}^{\;2} + \tau_{n-1}\tau_n + \tau_n^{\;2})/3 = \Delta\varphi_n/\Delta\tau_n$, (18)

где $\Delta\varphi_n = \Delta\varphi_n - \varphi_{n-1}$, $\Delta\tau_n = \tau_n - \tau_{n-1}$.

Дополнительно для данной параболы из второго краевого условия (4) получим еще одно уравнение:

$C_2^n + 2C_3^n\tau_n = 0$. (19)

Четыре уравнения системы (17) – (19) содержат 4 неизвестных коэффициента: C_3^{n-1}; C_1^n; C_2^n; C_3^n. Найдем их величины.

Выразим из (17) C_2^n (C_3^n):

$C_2^n = A_3^n C_3^n + B_3^n$,

где $A_3^n = -2\tau_n$; $B_3^n = 0$. (20)

Полученное выражение подставим во второе выражение (17) и найдем зависимость C_3^{n-1} (C_3^n):

$(A_2^{n-1} + 2\tau_{n-1})C_3^{n-1} + B_2^{n-1} = -2C_3^n\tau_n + 2C_3^n\tau_{n-1}$;

$C_3^{n-1} = A_3^{n-1}C_3^n + B_3^{n-1}$,

где $A_3^{n-1} = -2\Delta\tau_n/(A_2^{n-1} + 2\tau_{n-1})$; $B_3^{n-1} = -B_2^{n-1}/(A_2^{n-1} + 2\tau_{n-1})$. (21)

Подставляя данную зависимость в первое уравнение (17), найдем из него выражение для C_1^n (C_3^n):

$(A_1^{n-1} - \tau_{n-1}^{\;2})[-(2\Delta\tau_n C_3^n + B_2^{n-1})/(A_2^{n-1} + 2\tau_{n-1})] + B_1^{n-1} = C_1^n - C_3^n\tau_{n-1}^{\;2}$;

$C_1^n = A_1^n C_3^n + B_1^n$,

где $A_1^n = [-2\Delta\tau_n(A_1^{n-1} - \tau_{n-1}^{\;2})/(A_2^{n-1} + 2\tau_{n-1}) + \tau_{n-1}^{\;2}]$;

$B_1^n = B_2^{n-1}(A_1^{n-1} - \tau_{n-1}^{\;2})/(A_2^{n-1} + 2\tau_{n-1}) + B_1^{n-1}$. (22)

Подставляя зависимости (20) и (22) в уравнение (18), найдем из него выражение для коэффициента C_3^n:

$[-2\Delta\tau_n(A_1^{n-1} - \tau_{n-1}^{\;2})/(A_2^{n-1} + 2\tau_{n-1}) + \tau_{n-1}^{\;2}]C_3^n + B_2^{n-1}(A_1^{n-1} - \tau_{n-1}^{\;2})/(A_2^{n-1} + 2\tau_{n-1}) + B_1^{n-1} - 2C_3^n\tau_n(\tau_{n-1} + \tau_n)/2 + C_3^n(\tau_{n-1}^{\;2} + \tau_{n-1}\tau_n + \tau_n^{\;2})/3 = \Delta\varphi_n/\Delta\tau_n$;

$C_3{}^n = [\Delta\varphi_n/\Delta\tau_n - B_2{}^{n-1}(A_1{}^{n-1} - \tau_{n-1}{}^2)/(A_2{}^{n-1} + 2\tau_{n-1}) - B_1{}^{n-1}]/[-2\Delta\tau_n(A_1{}^{n-1} - \tau_{n-1}{}^2) / (A_2{}^{n-1} + 2\tau_{n-1}) - 2\Delta\tau_n (2\tau_{n-1} + \tau_n)/3]$. (23)

Таким образом, для конечной параболы $D^n(\tau)$ величина старшего коэффициента $C_3{}^n$ определяется не зависимостью вида (6), а формулой (23).

Для сокращения числа расчетных операций предложен следующий алгоритм расчета коэффициентов конечной параболы $\{C_1{}^n; C_2{}^n; C_3{}^n\}$ и значения старшего коэффициента $C_3{}^{n-1}$ параболы $D^{n-1}(\tau)$:

$C_3{}^n = [\Delta\varphi_n/\Delta\tau_n - B_2{}^{n-1} E^n - B_1{}^{n-1}]/[F^n(E^n + (G^n + \tau_n)/3]$;

где $\tau_{(n-1)кв} = \tau_{n-1}{}^2$; $G^n = 2\tau_{n-1}$; $H^n = 1/(A_2{}^{n-1} + G^n)$; $E^n = (A_1{}^{n-1} - \tau_{(n-1)кв})H^n$; $F^n = -2\Delta\tau_n$;

$C_1{}^n = [F^n E^n + \tau_{(n-1)кв}]\, C_3{}^n + B_2{}^{n-1} E^n + B_1{}^{n-1}$;

$C_2{}^n = (-2\tau_n)\, A_3{}^n\, C_3{}^n$;

$C_3{}^{n-1} = F^n\, H^n\, C_3{}^n - B_2{}^{n-1} H^n$. (24)

Обратный ход.

Заключается в последовательном расчете коэффициентов оставшихся квадратных парабол $D^i(\tau)$, $i = n-1,\ldots,1$. Выполняется в последовательности, обратной прямому ходу.

Для каждой параболы $D^i(\tau)$ ($i=n-1,\ldots,1$), по уже рассчитанному значению старшего коэффициента $C_3{}^{i+1}$ параболы $D^{i+1}(\tau)$ по формулам (6) вначале рассчитывается старший коэффициент $C_3{}^i$, а по нему – младшие $C_1{}^i$ и $C_2{}^i$.

4. Расчетный алгоритм и оценка его трудоемкости

Начальные данные: координаты точек $\overline{P}_i = (\varphi_i, \tau_i)$, ($i = 0, \ldots, n$), $\tau_0 = 0$.

Необходимо определить: массивы коэффициенты $\{C_1{}^i,\ C_2{}^i,\ C_3{}^i\}$ набора сплайнов $\{S_i(\tau)\}$ ($i = 1, \ldots, n$), обеспечивающих гладкость второй степени во внутренних узлах при краевых условиях: $S_0'(0) = 0$; $S_{n-1}''(\tau_n) = 0$.

Начальные действия. Вводим вспомогательные массивы$\{A_3{}^i\}$, $\{B_3{}^i\}$, $\{A_1 i\}$, $\{B_1 i\}$, $\{A_2 i\}$, $\{B_2 i\}$, в которых номера элементов изменяются от 1 до n -1. Поскольку в расчетах коэффициентов соседних парабол повторяются вычисления квадратов значений времени τ_i, то перед началом вычислений предварительно рассчитываем их:

$\tau_{(i)кв} = \tau_i{}^2$; 1, …, n . (25)

Шаг 1. Прямой ход. Расчет вспомогательных коэффициентов $A_1{}^1$, $B_1{}^1$, $A_2{}^1$, $B_2{}^1$ для начальной параболы $D^1(\tau)$. Из (9) следует:

$A_1{}^1 = -\tau_{(1)кв} / 3$; $B_1{}^1 = (\varphi_1 - \varphi_0)/\tau_1$; $A_2{}^1 = B_2{}^1 = 0$. (26)

Шаг 2. Прямой ход. Цикл по внутренним параболам (i = 1, …, n -1). Расчет вспомогательных коэффициентов $A_1{}^i$, $B_1{}^i$, $A_2{}^i$, $B_2{}^i$ для внутренней параболы $D^i(\tau)$, а также коэффициентов $A_3{}^{i-1}$, $B_3{}^{i-1}$ для параболы $D^{i-1}(\tau)$ выполняем по формулам (15):

$\tau_{iср} = (\tau_{i-1} + \tau_i)/2$; $\Delta\varphi_i = \Delta\varphi_i - \varphi_{i-1}$, $\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1}$; $К = A_1{}^{i-1} + A_2{}^{i-1}\tau_{iср} + \tau_{i-1}\tau_i$;

$F^i = A_1{}^{i-1} - \tau_{(i-1)кв}$; $\tau_{(i-1)у2} = 2\tau_{i-1}$; $G^i = A_2{}^{i-1} + \tau_{(i-1)у2}$;

$A_3{}^{i-1} = -\Delta\tau_{(i)кв} / (3К)$; $B_3{}^{i-1} = (\Delta\varphi_i / \Delta\tau_i - B_1{}^{i-1} - B_2{}^{i-1}\tau_{iср})/К$;

$A_1{}^i = A_3{}^{i-1} F^i + \tau_{(i-1)кв}$; $B_1{}^i = B_3{}^{i-1} F^i + B_1{}^{i-1}$;

$A_2{}^i = A_3{}^{i-1} G^i - \tau_{(i-1)у2}$; $B_2{}^i = B_3{}^{i-1} G^i + B_2{}^{i-1}$. (27)

Шаг 3. Прямой ход. Расчет коэффициентов $C_3{}^n$, $C_1{}^n$, $C_2{}^n$, $C_3{}^{n-1}$ выполняем по формулам (24):

$G^n = 2\tau_{n-1}$; $H^n = 1/(A_2{}^{n-1} + G^n)$; $E^n = (A_1{}^{n-1} - \tau_{(n-1)кв})H^n$; $F^n = -2\Delta\tau_n$;

$C_3{}^n = [\Delta\varphi_n/\Delta\tau_n - B_2{}^{n-1} E^n - B_1{}^{n-1}]/[F^n(E^n + (G^n + \tau_n)/3]$;

$C_1{}^n = [F^n E^n + \tau_{(n-1)кв}]\, C_3{}^n + B_2{}^{n-1} E^n + B_1{}^{n-1}$;

$C_2{}^n = (-2\tau_n)\, A_3{}^n\, C_3{}^n$;

$C_3{}^{n-1} = F^n\, H^n\, C_3{}^n - B_2{}^{n-1} H^n$. (28)

Шаг 4. Обратный ход. Цикл по параболам с номерами $i = n$ -1, …, 1. Расчет их коэффициентов $C_1{}^i$, $C_2{}^i$, $C_3{}^i$.

$C_3{}^i = A_3{}^i\, C_3{}^{i+1} + B_3{}^i$;

$C_1^{\,i} = A_1^{\,i}\, C_3^{\,i} + B_1^{\,i}$;

$C_2^{\,i} = A_2^{\,i}\, C_3^{\,i} + B_2^{\,i}$. (29)

Замечание. Если необходимо найти свободные коэффициенты сплайнов $C_0^{\,i}$, например – для визуализации формы получаемых сплайнов с целью проверки качества получаемых решений, то их проще всего найти по формуле:

$C_0^{\,i} = \varphi_i - C_1^{\,i}\, \tau_i - C_2^{\,i}\, \tau_i^2 /2 - C_3^{\,i}\, \tau_i^3 / 3,\ i = 1, \ldots, n.$ (30)

Суммарные затраты на выполнение прямого сокращенного метода расчета коэффициентов кубических интерполяционных сплайнов представлены в таблице 2.

Табл. 2. Количество расчетных операций при построении n сплайнов

Стадии	Сложения и вычитания	Умножения	Деления
1. Начальные действия	0	n	0
2. Прямой ход. Расчет переходных коэффициентов A_1^1, B_1^1, A_2^1, B_2^1 для начальной параболы $D^1(\tau)$ (26)	1	0	2
3. Прямой ход. Расчет в цикле по внутренним параболам ($i = 1, \ldots, n - 1$) переходных коэффициентов A_1^i, B_1^i, A_2^i, B_2^i, A_3^{i-1}, B_3^{i-1} (27)	$13(n-2)$	$8(n-2)$	$4(n-2)$
4. Прямой ход. Расчет коэффициентов конечной параболы C_3^n, C_1^n, C_2^n и коэффициента $C_3^{\,n-1}$ (28)	10	14	4
5. Обратный ход (29)	$3(n-1)$	$3(n-1)$	0
ИТОГО	$16n-18$	$12n-5$	$4n-2$

5. Заключение

Выполненные расчеты трудоемкости алгоритма с применением сплайнов Эрмита и алгоритма прямого частичного расчета коэффициентов кубических интерполяционных сплайнов (таблицы 1 и 2) показывают, что предложенный метод является значительно менее затратным при решении задач управления с прогнозированием.

В сравнении с затратами метода прогонки на построение сплайнов, зависящих от глобальной переменной (что требуется в задаче управления с предсказанием), предложенный метод сокращает число каждой из основных операций примерно в 2 раза.

Список литературы:

1.Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002 г. – 632 с.

2. Гданский Н.И. Геометрическое моделирование и машинная графика. – М.: МГУИЭ, 2003 г. – 236 с.