

Модифицированный метод оценки спектральных характеристик с применением дискретных преобразований Уолша и метода параметрического спектрального анализа Прони

В.П.Иосифов¹, Е.В. Гулынина¹, Л.Г. Иосифова²

¹ *Ставропольский государственный педагогический институт, Ессентуки*

² *Московский государственный технический университет*

Аннотация: В представленной статье рассматривается трехшаговый подход в модифицированного метода оценки спектральных характеристик с применением дискретных преобразований Уолша и метода параметрического спектрального анализа Прони. Кратко описан метод основанный на методе параметрического спектрального анализа Прони, с описанием положительных и отрицательных свойств. Также предлагается применение дискретных преобразований Уолша и Адамара. Предложено использование трехшаговой процедуры.

Применение дискретных преобразований Уолша позволит упростить и сократить вычислительные процедуры. При применении этих преобразований для анализа параметров математической модели процессов с близкими характеристиками предлагается вычислить шаблоны, с последующим сравнением этих шаблонов. И для каждой группы шаблонов предлагается однократно производить расчет параметров с применением модифицированного метода Прони или комбинированного метода Прони и метода Берга. Далее при последующих вычислениях с применением преобразований Уолша необходимо сравнить полученные результаты с имеющимися шаблонами.

Ключевые слова: моделирование, спектральный анализ, метод Прони, метод Уолша, порядок модели, шаг дискретизации, длительность отклика.

В задачах оценки спектральных характеристик устройств, а также в задачах исследований операций различного характера наиболее часто применяются как методы классического спектрального анализа, так и параметрические методы спектрального анализа [1].

Классические методы спектрального анализа основаны на применении дискретного преобразования Фурье. Реализации их посвящены огромное количество различных монографий и статей. Причем необходимо отметить,

что на достаточно высоком уровне классические методы реализованы с применением вычислительной техники. Но с учетом требований к точности определения характеристик рассматриваемых процессов, и достоверности полученных результатов к реальным параметрам, а также соответствия математической модели исследуемого процесса к физической модели применяются параметрические методы спектрального анализа [2].

Приведем наиболее часто применяемые методы параметрического спектрального анализа [3]:

- метода Юла-Уоркера;
- метод Берга, с различными модификациями;
- алгоритм Левинсона;
- метод Писаренко;
- метод Прони, с различными модификациями.

В различных задачах применяются вышеприведённые методы. Наиболее часто авторы используют комбинированные способы применения этих методов в различных комбинациях [4].

Эти методы объединяет следующее:

- все эти методы основаны на применении авторегрессионных уравнений;
- сложность, заключающийся в определении порядка описываемой математической модели;
- сложность выбора как шага дискретизации, так и объема всей выборки.

Наиболее приемлемые результаты получаются при использовании метода Прони [5].

1. Метод Прони заключается в том, что исходные данные моделируются как сумма экспоненциально затухающих синусоид в линейной комбинации. И нахождение параметров основано на применении метода

наименьших квадратов для оценивания авторегрессионных параметров. С применением метода Прони производится нахождение параметров модели с аппроксимацией исследуемых данных [6].

Математическая модель метода основана на использовании следующих соотношений:

$$\bar{x}(n) = \sum_{k=1}^m A_k \exp\left[(\alpha_k + 2\pi j f_k)(n-1)\Delta t + j\Theta_k\right], \quad (1)$$

где Δt – шаг дискретизации сигнала в секундах; $A_k, \alpha_k, f_k, \Theta_k$ – амплитуда, коэффициент затухания, частота и начальная фаза k -составляющей затухающей синусоиды [7].

Для вычислений параметров $A_k, \alpha_k, f_k, \Theta_k$ необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 x_m + a_2 x_{m-1} + \dots + a_m x_1 = x_{m+1} \\ a_1 x_{m+1} + a_2 x_m + \dots + a_m x_2 = x_{m+2} \\ a_1 x_{m+2} + a_2 x_{m+1} + \dots + a_m x_3 = x_{m+3} \\ \vdots \\ a_1 x_{N-1} + a_2 x_{N-2} + \dots + a_m x_{N-m-1} = x_N \end{cases} \quad (2)$$

Или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x_{M-1} & x_{M-2} & \dots & x_1 \\ x_M & x_{M-1} & \dots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N-1} & x_{N-2} & \dots & x_{N-M-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_M \\ x_{M+1} \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Эти соотношения дают возможность найти декременты затуханий и собственные частоты составляющих, после нахождения комплексных корней характеристического уравнения [8]:

$$Z^M + a_1 Z^{M-1} + a_2 Z^{M-2} + \dots + a_{M-1} Z + a_M = 0. \quad (4)$$

По найденным корням характеристического уравнения находим искомые параметры экспоненциальных составляющих:

$$\alpha_i = \frac{\ln|z_i|}{T}, \text{ с}^{-1}, \quad (5)$$

$$f_i = \frac{\text{arctg}[\text{Im}(z_i)/\text{Re}(z_i)]}{2\pi T}, \text{ Гц.}$$

Чтобы найти амплитуды и фазы необходимо воспользоваться следующими уравнениями:

$$\begin{pmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \dots & z_M^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \dots & z_M^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_M^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N] \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Значения величин амплитуд и фаз вычисляются с помощью выражений

$$A_i = |b_i|, \quad (7)$$

$$\Theta_i = \text{arctg}[\text{Im}(b_i)/\text{Re}(b_i)], \text{ рад.}$$

Спектральные характеристик для такой модели вычисляются с помощью следующего выражения [9]:

$$S_p(f) = \left| \sum_{i=1}^p A_i \frac{2\pi f_i}{(\alpha_i + 2\pi j f)^2 + 4\pi^2 f_i^2} \right|. \quad (8)$$

Для выбора длительности отклика предложено использовать следующее соотношение:

$$T = \Phi \left[\arg \min (\Delta t \cdot N_1) \left\{ \left(\sum_{i=0}^{N_1} x_i \right) = 0,9 \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i \right) \right\} \right], \quad 9)$$

где Δt – шаг дискретизации; N_1 – количество выбранных отсчетов; N – количество отсчетов всего отклика.

2. Методы дискретного преобразования Уолша или преобразования Адамара. В основе этих методов разложение сигнала не на синусоиды, а на прямоугольные импульсы. Остановимся на преобразовании Уолша. Простота этого преобразования заключается в том, что в этом методе сигналы принимают значения +1 и -1. Применение преобразования Уолша обладает следующими свойствами – это преобразование слабо пригодно для непрерывных сигналов, так как могут не быть инвариантными по фазе. Из-за этого вычисляемый спектр исказится. Основное достоинство применения дискретного преобразования Уолша или Адамара, их эффективная вычислительная реализация [10].

Сами дискретные преобразования Уолша очень просты. Приведем пример для 4 и 8 точек:

$$w_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$w_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

В данной статье предлагается использование трех шаговый способ [11]:

- На первом шаге выбирается длительность отклика, а если возможно и решается вопрос шага дискретизации;
- С применением дискретных преобразований Уолша находится порядок модели
- С использованием метода Прони, или различных его модификаций находим уточнённые значения параметров для выбранного порядка модели.

Применение дискретных преобразований Уолша позволит упростить и сократить вычислительные процедуры. Еще при применении этих преобразований для анализа параметров математической модели процессов с близкими характеристиками можно вычислить шаблоны, с последующим сравнением этих шаблонов. И для каждой группы шаблонов можно однократно производить расчет параметров с применением модифицированного метода Прони или комбинированного метода Прони и метода Берга. Далее при последующих вычислениях с применением преобразований Уолша сравнить полученные результаты с имеющимися шаблонами.

Литература

1. Иосифов, В. П. Методика исключения влияния параметров нестационарности на динамические характеристики средств измерений // Инженерный вестник Дона. – 2010, № 4. URL ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2010/307/.

2. Иосифов, В. П. Имитационный подход к проблеме определения динамических характеристик средств измерений // Инженерный вестник Дона. – 2010. № 4. URL: ivdon.ru/magazine/latest/n4y2010/308/.

3. Марпл.-мл., С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: пер. с англ. – М. : Мир, 1990. -584с.

4. Theodoris S., Cooper D. C. Applications of Maximum Entropy Spectrum Analysis Technique to Signals with Spectral Peaks of Finite Width // Signal Processing. – 1981. – Vol. 3. – № 2, Apr. – pp. 109–122.

5. Kumaresan, R., Tufts D. W. Singular value decomposition and spectral analysis // Proc. IEEE Workshop on Spectral Estimation (Hamilton, Oct.). – 1981. – P. 641–712.

6. Иосифов В.П. Метод аппроксимации импульсных сигналов с короткой длительностью дробно-рациональными функциями // Датчики и системы. 2002. № 6. С. 19-20.

7. Harris F. On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform. Proceedings of the IEEE. 66 (1) Jan., 1978, pp. 51–83

8. Лайнос Р. Цифровая обработка сигналов. Москва, ООО "Бином-Пресс", 2006. -656 с.

9. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. Москва, Техносфера, 2006.-856с.

10. Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов. - М., Советское радио, 1973. -368с.

11. Бриллинджер, Д. Р. Временные ряды. Обработка данных и теория. - М.: Мир, 1980. – 536 с.

References

1. Iosifov, V. P. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2010, № 4. URL ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2010/307/.

2. Iosifov, V. P. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus). 2010. № 4. URL: ivdon.ru/magazine/latest/n4y2010/308/.

3. Marpl.-ml., S. L. Cifrovoj spektral'ny`j analiz i ego prilozheniya: per. s angl. [Digital spectrum analysis and its applications]. Moscow: Mir, 1990. 584p.



4. Theodoris, S., Cooper D. C. Signal Processing. 1981. Vol. 3. № 2, Apr. pp. 109–122.
5. Kumaresan, R., Tufts D. W. Singular value decomposition and spectral analysis. Proc. IEEE Workshop on Spectral Estimation (Hamilton, Oct.). 1981. pp. 641–712.
6. Iosifov V.P. Datchiki i sistemy`. 2002. № 6. pp. 19-20.
7. Harris F. On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform. Proceedings of the IEEE. 66 (1) Jan., 1978, pp. 51–83
8. Lajnos P. Cifrovaya obrabotka signalov [Digital signal processing]. Moscow: OOO "Binom-Press", 2006.656 p.
9. Oppengejm A., Shafer R. Cifrovaya obrabotka signalov [Digital signal processing]. Moscow. Texnosfera, 2006. 856p.
10. Gold B., Re`jder Ch. Cifrovaya obrbotka signalov [Digital signal processing]. Moscow: Sovetskoe radio, 1973.368p.
11. Brillindzher, D. R. Vremenny`e ryady`. Obrabotka danny`x i teoriya [Time series. Data processing and theory]. Moscow: Mir, 1980. 536 p.