

## Применение рекуррентной математической модели для оценки параметров тяговой сети при их динамическом изменении

*А.А. Капкаев*

*Ростовский государственный университет путей сообщения*

**Аннотация:** Статья посвящена возможности применения методов последовательных приближений при анализе мгновенной схемы тяговой сети. Описываемый подход позволяет улучшить точность моделирования динамических режимов работы участков тягового электроснабжения, а также - существенно улучшить процесс моделирования систем диагностики и управления электроподвижным составом на стадии проектирования, опираясь на более точную модель динамически изменяющихся входных параметров тяговой сети в зависимости от их необходимого уровня.

**Ключевые слова:** тяговая сеть, мгновенная схема, диагностика, моделирование, итерация.

Повышение точности расчёта любых математических моделей, описывающих реальные процессы, является актуальной задачей. Математические модели лежат в основе создания систем автоматического управления процессами, создания адаптивных тренажёрных комплексов максимально приближенных к реальности [1]. Также реализация точных математических моделей позволяет наиболее скрупулезно рассчитывать параметры моделируемой системы или процесса, что в свою очередь позволяет снизить погрешности при реализации различных проектов, или при выборе дорогостоящего оборудования [2]. Ну и, пожалуй, самым важным и перспективным направлением применения точных математических моделей является возможность создания высокоточных систем управления, позволяющих уменьшить влияние человеческого фактора, и внедрение системы искусственного интеллекта, в основе которых лежат подобные высокоточные математические модели.

В данной публикации мы рассмотрим применение итерационных методов исчисления для расчёта динамически изменяющихся параметров тяговой сети, при движении электровоза между подстанциями для случая двухстороннего питания. Наиболее оптимальным подходом в данном случае, по мнению автора, является рассмотрение электровоза в качестве источника заданной мощности [3, 4], при движении электровоза на участке между тяговыми подстанциями, модуль среднеквадратичного значения тока в контактной сети как со стороны одной, так и со стороны второй подстанции будет динамически изменяться по мере движения поезда. При этом будут изменяться и начальные фазы этих токов, и коэффициент мощности для расчёта потерь

мощности в тяговой сети. Для решения такой задачи очень хорошо подходит метод последовательных приближений [5], а точнее метод Ньютона-Рафсона [6, 7] который в данном контексте является подходящим решением для анализа динамически изменяющихся параметров тяговой сети [8]. Однако в нашем случае возникает вопрос о необходимом количестве итераций при расчёте параметров тяговой сети, для каждой точки расчёта функции или функций. В этом случае наиболее оптимальным выходом, который позволит избежать необходимость учёта количества итераций для каждого шага, является применение простейшей рекуррентной модели расчёта, базирующейся на цикле, предположением в котором, основным признаком окончания цикла итерационных приближений является критерий сходимости – процентное отношение расчётного значения предыдущей итерации и нынешней итерации.

В этой публикации данный расчёт реализован при использовании языка программирования Python. В качестве примера применения модели мы примем следующую схему замещения:

На данной схеме замещения (Рис. 1)  $x$  - текущая координата поезда в км, которая определяется из условия  $x = \frac{v}{3600} \cdot t$  где  $v$  - скорость поезда в км/ч, а  $t$  - время в секундах (в рассматриваемой модели мы будем определять изменение координаты поезда с шагом в одну секунду)  $\underline{Z}_K, \underline{Z}_P, \underline{Z}_{KP}$  полные сопротивления контуров типа «проводник – земля» для контактной сети (К), рельсовой цепи (Р) и взаимоиндуктивное сопротивление между этими контурами (КР) соответственно,  $l$  - общая длина участка в километрах.

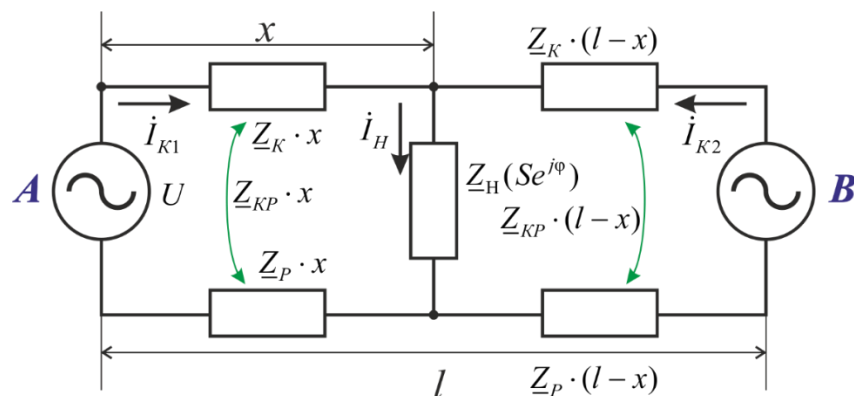


Рис. 1 – Схема замещения участка тяговой сети с двухпутным питанием при рассмотрении ЭПС в виде источника заданной мощности  $\underline{Z}_H(Se^{j\phi})$ .

В представленной схеме замещения мы примем некоторые допущения, так как нам интересно получить конкретный результат применения рекуррентной модели. В частности, мы пока пренебрегаем растеканием тока в земле, хотя очевидно, что по мере удаления от подстанции сопротивление рельсовой цепи будет изменяться нелинейно, из-за связи с землёй через сопротивление балластной призмы.

Перейдём к системе, уравнения которой понадобятся нам для составления модели. Комплексно-сопряжённое значение тока расчётного поезда для случая нулевой итерации (начальные значения):

$$\underline{I}_{H(0)}^* = \frac{Se^{j\varphi}}{U_H}$$

Где  $Se^{j\varphi}$  - комплексное значение величины полной мощности для расчётного поезда. Данное значение может быть определено, исходя из тяговых расчётов, и в перспективе может стать частью рекуррентной модели, данная величина зависит от массы поезда, скорости его движения, типа преобразовательных агрегатов и в частности от уровня входных параметров.

Для рассматриваемой модели система уравнения по правилам Кирхгофа с заменой величины падения напряжения отношением полной комплексной мощности электровоза к сопряжённому комплексному значению величины тока, потребляемого электровозом:

$$\begin{cases} \underline{I}_H - \underline{I}_{K1} - \underline{I}_{K2} = 0 \\ \underline{I}_{K1} \cdot x \cdot (\underline{Z}_K + \underline{Z}_P - 2\underline{Z}_{KP}) + \frac{\underline{S}}{\underline{I}_H^*} = U_H \\ \underline{I}_{K2} \cdot (l-x) \cdot (\underline{Z}_K + \underline{Z}_P - 2\underline{Z}_{KP}) + \frac{\underline{S}}{\underline{I}_H^*} = U_H \end{cases}$$

Значение  $\frac{\underline{S}}{\underline{I}_H^*}$  входит в оба уравнения, что позволяет упростить описание нашей

системы, в итоге мы получим следующие выражения:

$$\underline{I}_{K1} = \frac{U_H \cdot \underline{I}_H^* - \underline{S}}{\underline{I}_H^* \cdot x \cdot (\underline{Z}_K + \underline{Z}_P - 2\underline{Z}_{KP})} \text{ и } \underline{I}_{K2} = \frac{U_H \cdot \underline{I}_H^* - \underline{S}}{\underline{I}_H^* \cdot (l-x) \cdot (\underline{Z}_K + \underline{Z}_P - 2\underline{Z}_{KP})}$$

И опять мы видим сходство данных выражений, в частности отношение данных

выражений:  $\frac{\underline{I}_{K1}}{\underline{I}_{K2}} = \frac{(l-x)}{x}$  это позволяет нам определить первичные приближения токов

контактной сети для нулевой итерации, что позволяет нам производить расчёты динамических параметров даже для случая начала расчётов в точке нахождения поезда, отличной от нулевой координаты  $x$ .

$$\underline{I}_{K1(0)} = \underline{I}_{H(0)} \cdot \frac{(l-x)}{l} \text{ и } \underline{I}_{K2(0)} = \underline{I}_{H(0)} \cdot \frac{x}{l}$$

В итоге используем классическое выражение для расчёта функции методом Ньютона-Рафсона  $x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$

Также используем полученные соотношения для определения токов контактной сети, для того чтобы свести расчёт системы к поиску решения одного уравнения (для подстановки можно использовать одно из двух уравнений по второму правилу Кирхгофа, записанных выше):

$$\underline{I}_{H(i)(j+1)}^* = \underline{I}_{H(i)(j)}^* - \frac{-\underline{U} + \underline{I}_{H(i)(j)} \cdot \frac{(l-x_i)}{l} \cdot x_i \cdot (Z_K + Z_P - 2Z_{KP}) + \underline{S} / \underline{I}_{H(i)(j)}^*}{\frac{d}{d\underline{I}_{H(i)(j)}^*} \left[ -\underline{U} + \underline{I}_{H(i)(j)} \cdot \frac{(l-x_i)}{l} \cdot x_i \cdot (Z_K + Z_P - 2Z_{KP}) + \underline{S} / \underline{I}_{H(i)(j)}^* \right]}$$

Далее рассмотрим программную реализацию нашего решения (Рис. 2) и для примера получим численные значения параметров тяговой сети. Потребляемая полная мощность электровоза:  $S = 7000$  кВА, коэффициент мощности 0,93 или мощность в комплексной форме  $\underline{S}_2 = 7000e^{j21,5^\circ}$  кВА, номинальное напряжение контактной сети в точке тяговой подстанции (источника энергии)  $U = 25$  кВ. Сопротивление элементов тяговой сети в комплексной форме  $\underline{Z}_K = 0,132 + j0,53$   $\underline{Z}_P = 0,139 + j0,502$   $\underline{Z}_{KP} = 0,049 + j0,234$  длина участка  $l = 50$  км. скорость движения поезда  $v = 60$  км/ч, время, для которого производится расчёт положения поезда на участке  $t = 60$  мин.

В представленном блоке кода на языке Python внутри цикла for производящего изменение времени, для которого рассматривалось движение, цикл while имел условие по сходимости модуля значения тока электровоза и его аргумента, для модуля порог схождения выбран равным 0,01 %, а для аргумента 0,1 %. Только при соблюдении данных

условий уточнение величины прекращалось, и происходило заполнение словаря данными для текущего момента времени и текущей координаты поезда (Рис. 3).

```
for second in range(time * 60):
    # текущая координата
    x = train1.speed_max / 3600 * second
    # условие досрочного окончания цикла
    if x > lenght:
        break
    # определение начальных условий
    if second == 0:
        # нулевая итерация для тока контактной сети со стороны подстанции А
        i_train0 = (i_train0 * (lenght - x) / lenght).conjugate()
        # нулевая итерация для тока контактной сети со стороны подстанции В
        i_cont2_0 = (i_train0 * x / lenght).conjugate()
    data["time"].append(second)
    data["coordinate"].append(x)
    dist_var = ((lenght - x) / lenght) * x
    i_train1 = 0
    mod_dif = 100
    arg_dif = 100
    while mod_dif > 0.01 or arg_dif > 0.1:
        # числитель уравнения
        caliel = -U_NOM + (i_train0.conjugate()) * dist_var * \
            (Z1way["Zk1"] + Z1way["Zr1"] - 2 * Z1way["Zk1r1"]) \
            + train1.full_power / i_train0
        # расчёт знаменателя уравнения через функцию с параметром (dif_denominator)
        denominator = misc.derivative(dif_denominator, i_train0)
        i_train1 = i_train0 - caliel / denominator
        mod_dif = abs(i_train1.real - i_train0.real) / abs(i_train0.real) * 100
        arg_dif = abs(i_train1.imag - i_train0.imag) / abs(i_train0.imag) * 100
    i_train0 = i_train1
```

Рис. 2 – Листинг кода реализации рекуррентной модели для расчёта параметров тяговой сети при динамическом изменении её параметров.

В дальнейшем, использование библиотеки Pandas позволит собрать все полученные данные в структуру DataFrame для дальнейшего анализа.

В результате анализа мы можем получить следующий DataFrame (Рис. 4), содержащий крупную выборку расчётных данных с возможностью её анализа и визуализации.

```
mod, fi = cmath.polar(i_train0.conjugate())
fi = math.degrees(fi)
data["current_train1_abs"].append(mod)
data["current_train1_fi"].append(fi)
# нулевая итерация для тока контактной сети со стороны подстанции А
i_cont1_0 = (i_train0 * (length - x) / length).conjugate()
mod, fi = cmath.polar(i_cont1_0)
fi = math.degrees(fi)
data["current_abs1"].append(mod)
data["current_fi1"].append(fi)
# нулевая итерация для тока контактной сети со стороны подстанции В
i_cont2_0 = (i_train0 * x / length).conjugate()
mod, fi = cmath.polar(i_cont2_0)
fi = math.degrees(fi)
data["current_abs2"].append(mod)
data["current_fi2"].append(fi)

train_voltage = cmath.polar(train1.full_power / i_train0)
data["U_train_abs"].append(train_voltage[0])
data["U_train_fi"].append(math.degrees(train_voltage[1]))

deltaU1 = cmath.polar(i_cont1_0 * x * (Z1way["Zk1"] + Z1way["Zr1"] - 2 * Z1way["Zkir1"]))
data["delta_U1_abs"].append(deltaU1[0])
data["delta_U1_fi"].append(math.degrees(deltaU1[1]))

deltaU2 = cmath.polar(i_cont2_0 * (length - x) * (Z1way["Zk1"] + Z1way["Zr1"] - 2 * Z1way["Zkir1"]))
data["delta_U2_abs"].append(deltaU2[0])
data["delta_U2_fi"].append(math.degrees(deltaU2[1]))
#коэффициенты мощности
fi = math.degrees(deltaU1[1]) - math.degrees(cmath.polar(i_cont1_0)[1])
data["cos_fi_1"].append(fi)
data["delta_pow1"].append((cmath.rect(*deltaU1) * i_cont1_0.conjugate()).real)

fi = math.degrees(deltaU2[1]) - math.degrees(cmath.polar(i_cont2_0)[1])
data["cos_fi_2"].append(fi)
data["delta_pow2"].append((cmath.rect(*deltaU2) * i_cont2_0.conjugate()).real)
```

Рис. 3 – Формирование блока анализируемых данных в виде словаря со связанными списками.

```
In [11]: data_frame = pd.DataFrame(data=data)
In [12]: data_frame
Out[12]:
```

	time	coordinate	current_train1_abs	current_train1_fi	current_abs1	current_fi1	current_abs2	current_fi2
0	0	0.000000	280.000000	-21.565185	280.000000	-21.565185	0.000000	-0.000000
1	1	0.016667	280.019255	-21.570118	279.925916	-21.570118	0.093340	-21.570118
2	2	0.033333	280.038505	-21.575048	279.851813	-21.575048	0.186682	-21.575048
3	3	0.050000	280.057749	-21.579976	279.777692	-21.579976	0.280058	-21.579976
4	4	0.066667	280.076988	-21.584902	279.703552	-21.584902	0.373436	-21.584902
...	...	...	...	...	...	...	...	...
2996	2996	49.933333	280.077016	-21.584902	0.373436	-21.584902	279.703580	-21.584902
2997	2997	49.950000	280.057770	-21.579976	0.280058	-21.579976	279.777713	-21.579976
2998	2998	49.966667	280.038519	-21.575048	0.186692	-21.575048	279.851827	-21.575048
2999	2999	49.983333	280.019263	-21.570118	0.093340	-21.570118	279.925923	-21.570118
3000	3000	50.000000	280.000001	-21.565184	0.000000	-0.000000	280.000001	-21.565184

3001 rows x 18 columns

Рис 4 – Результаты моделирования, собранные в структуру данных Pandas.DataFrame 3000 строк на 18 столбцов.

В дальнейшем мы можем производить анализ полученных данных (Рис.5).

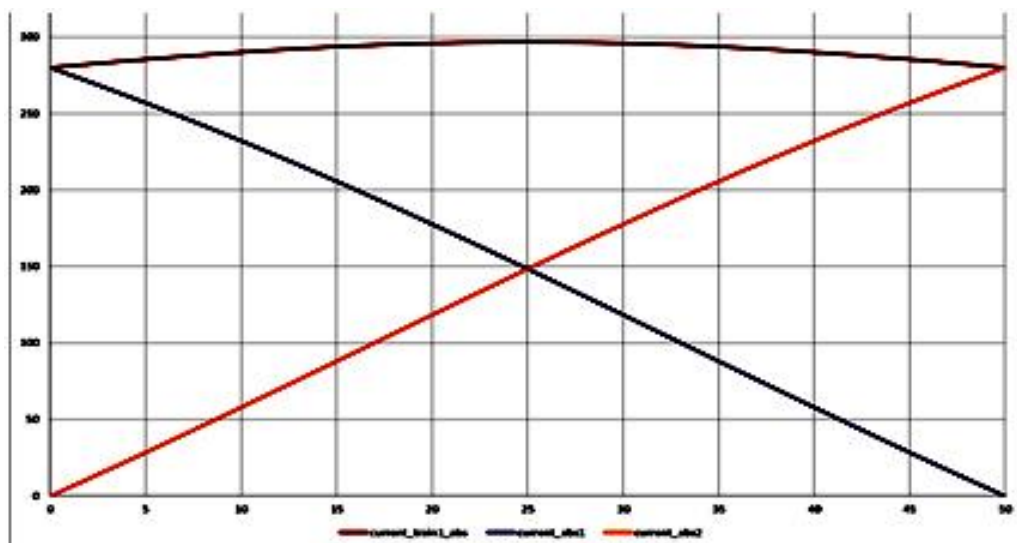


Рис 5. – Зависимость модулей токов контактной сети и расчётного поезда от места положения электровоза.

В данном графике мы можем отслеживать изменение тока контактной сети и изменение величины тока расчётного поезда при его движении. Изменение тока контактной сети линейно, т.к. мы не учитываем растекание тока в земле и нелинейное изменение сопротивления рельсовой цепи.

Также вызывает интерес оценка величин потери мощности при движении поезда (Рис.6).

Исходя из данного графика, мы можем прийти к выводу, что максимум потерь мощности приходится на расположение поезда в центре подстанционной зоны, также можно выделить пики потерь мощности в участках контактной сети по мере приближения и отдаления от центра зоны.

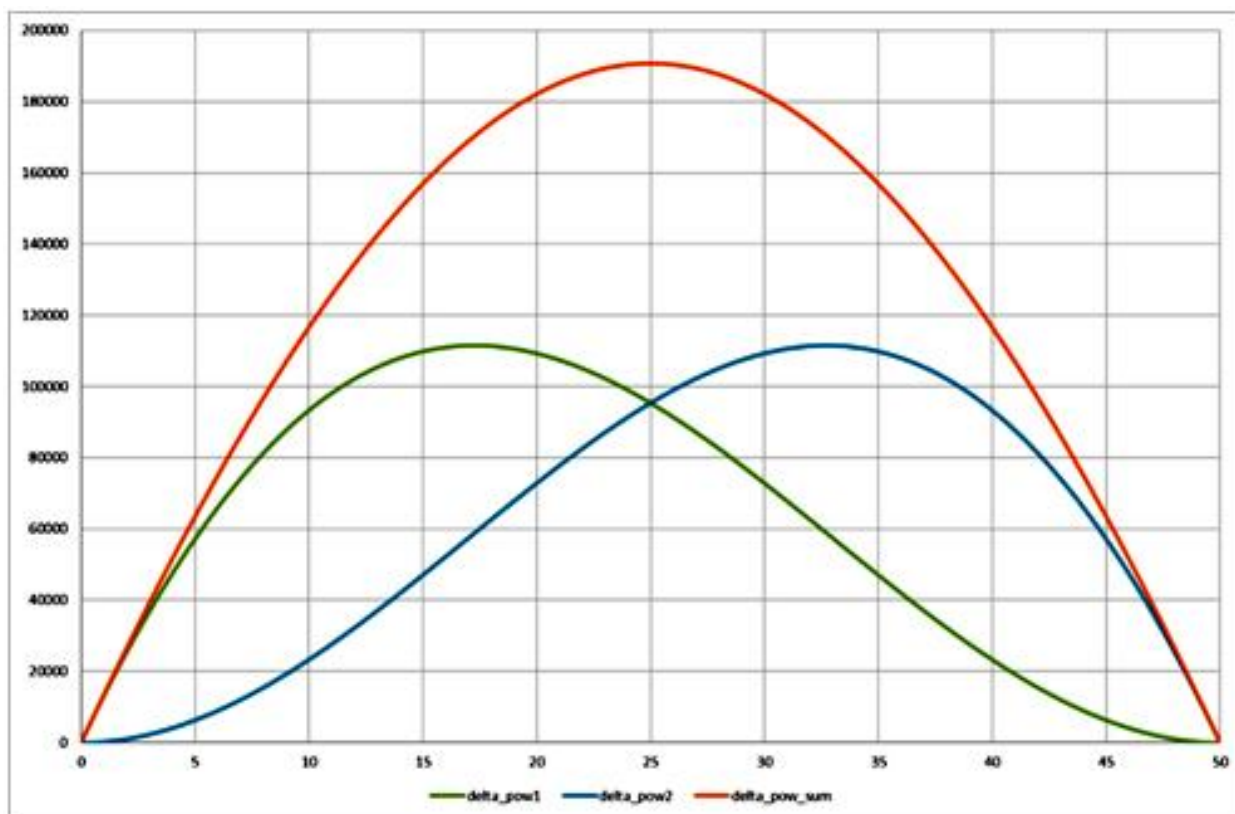


Рис. 6 – Значения потерь активной мощности на контактной сети, рассчитанные для текущей точки расположения поезда.

Подводя итог, можно сказать, что даже с учётом используемых допущений, рекуррентная модель позволяет получить более точные результаты, нежели методы усреднения с использованием коэффициентов контактной сети.

В дальнейшем такой же подход можно использовать при решении системы уравнений для общего случая описания системы тяговой сети с использованием методов математической оптимизации [9, 10]

## Литература

1. Юренко И.К., Шепилова Е.Г., Гречук И.А. Совершенствование бортовых систем управления локомотивов на базе технических средств тренажеро-моделирующих комплексов // Инженерный вестник Дона, 2014, №2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2014/2452](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2014/2452).
2. Капкаев А.А., Микаэльян Е.Ю. Алгоритм выбора металлизированного волоконно-оптического кабеля для его работы в качестве комбинированного экранирующего провода





тяговой сети электрических железных дорог // Инженерный вестник Дона, 2016, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2016/3850

3. Thanatchai Kulworawanichpong Optimising AC electric railway power flows with power electronic control // A thesis submitted to The University of Birmingham / Department of Electronic, Electrical and Computer Engineering School of Engineering The University of Birmingham November 2003 P.304

4. Khan A.M.M.; Bickford J.P. Interactive calculation of power system transients // IEE Proceedings C - Generation, Transmission and Distribution (Volume: 127, Issue: 1, January 1980). Page(s): 41 – 43

5. Капкаев А.А. Применение итерационных методов исчисления для анализа и моделирования мгновенных схем тягового электроснабжения // Инженерный вестник Дона, 2019, №8. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N8y2019/6142

6. Поляк Б.Т. Метод Ньютона и его роль в оптимизации и вычислительной математике / Труды ИСА РАН 2006. Т. 28 С.48-66.

7. Канторович Л. В. О методе Ньютона для функциональных уравнений // Доклады АН СССР. 1948. 59 (7). С. 1237–1240.

8. Levenberg K. A method for the solution of certain nonlinear problems in least squares // Quarterly of Applied Mathematics. 1944. № 2. pp. 164–168.

9. Сысолятина Л.Г. Задача многомерной оптимизации: метод ньютона / Альманах современной науки и образования, № 8 (63) 2012 С.151-155

10. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. С.823.

### References

1. Каркаев А.А., Микажел'ян Е.Ю. Inzhenernyj vestnik Dona, 2016, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2016/3850

2. Jurenko I.K., Shepilova E.G., Grechuk I.A. Inzhenernyj vestnik Dona 2014, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2014/2452.

3. Thanatchai Kulworawanichpong A thesis submitted to The University of Birmingham Department of Electronic, Electrical and Computer Engineering School of Engineering The University of Birmingham November 2003. P.304.

4. Khan A.M.M.; Bickford J.P. IEE Proceedings C Generation, Transmission and Distribution (Volume: 127, Issue: 1, January 1980). Page(s): 41 – 43



5. Каркаев А.А. Inzhenernyj vestnik Dona, 2019, №8. URL:  
ivdon.ru/ru/magazine/archive/N8y2019/6142
6. Poljak B.T. Trudy ISA RAS 2006. Vol. 28 Pages.48-66
7. Kantorovich L. V. Doklady AN USSR. 1948. Vol. 59 (7). Pages. 1237–1240.
8. Levenberg K. A Quarterly of Applied Mathematics. 1944. № 2. pp. 164–168.
9. Sysoljatina L.G. Al'manah sovremennoj nauki i obrazovaniya, № 8 (63) 2012 Pages.151-155
10. Vasil'ev F. P. Metody optimizacii [Optimization methods]. 2002. P.823.